Rudolf Steiner matematikai ösztönzései

amikor már felhívást is jelentettek a számomra, a rájuk adott válaszul elkezdtem foglalkozni projektív geometriával. A projektív geometria történetében Alfred North Whitehead volt az első, aki a 19. század végén az *anti-tér* ötletét elkezdte kidolgozni[i] és Kepler, aki először vetette fel a *végtelen távoli pont* kérdésétⁱⁱ. Egyik alkalommal, amikor Dornachba mentem, a Goetheanum könyvesboltjában megvettem Oliver Conradt Phd dolgozatát, angolul: Mathematical Physics in Space and Counterspace (Tér és ellentér a matematikai fizikában)[iii]. Oliver Conradt hazánkban is tartott előadásokat. A magyar nyelvű irodalom is kitűnő a témában, amit mi se bizonyít jobban, mint Klug Lipót 19. század végén és a 20. század elején írt egy-egy kötete[iv], amelyekben nagyon szép magyar nyelvi stílusban tárgyalja a projektív geometriát.

A projektív geometria fennsíkjára több út vezet

A *projektív sík* számára három *alapfogalmat* és három *axiómát* használunk. Alapfogalmak: *pont, egyenes, illeszkedés*. Az axiómák:

-Bármely két különböző ponthoz pontosan egy olyan egyenes létezik, hogy e pontok illeszkednek az egyenesre.

-Bármely két különböző egyeneshez pontosan egy olyan pont létezik, hogy e pont illeszkedik az egyenesekre.

-Létezik négy pont úgy, hogy semelyik három sem illeszkedik egy egyenesre.

Amint Hoffmann Miklós és Papp Ildikó „Affin és projektív geometria" c. tankönyvben írják: „Már az axiómákból is látszik a projektív geometria egyik legfontosabb elve, a dualitás. Ha egy axiómában megcseréljük a pont és egyenes szerepét, akkor egy másik axiómát kapunk." A dualitásra

Hegel kategória-rendszere kapcsán, a fennsíkkal kapcsolatos képre később térek vissza.

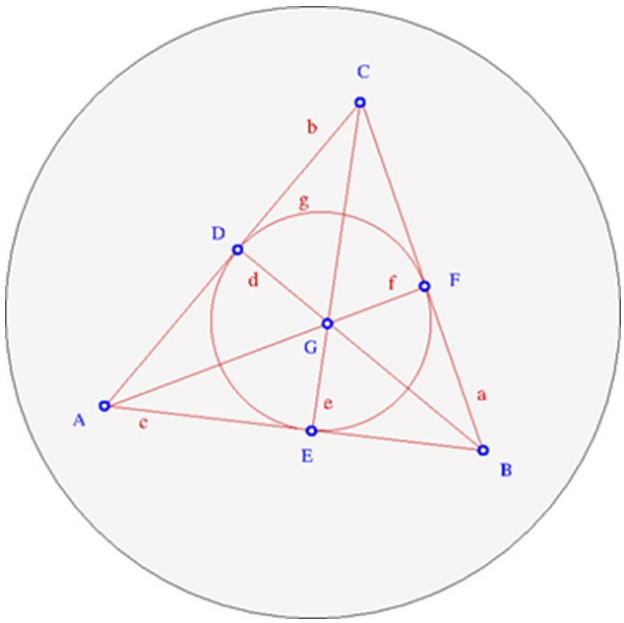
Az emberi gondolkodásban valahol el kell indulni a kategóriák használatában, a matematikában is így van, ezért alapfogalmakat és axiómákat használnak. Nem mondják meg, mi a pont, mi az egyenes és mi a sík, ezek egyszerű és nyilvánvaló fogalmak, a lehető legtágabb és legkevesebb tartalommal. Erre is Hegel kapcsán térek vissza.

A projektív síknak több *modellje* is van. Vegyünk egyet.[v]

A Fano-sík

Annak érdekében, hogy ez a bevezető jellegű cikk legalább egy matematikai tételt is lehozzon, íme az első tételünk:

-Létezik olyan projektív sík, amely csak hét pontot és csak hét egyenest tartalmaz, úgy, hogy minden pontra pontosan három egyenes illeszkedik és minden egyenesre pontosan három pont illeszkedik.



1. ábra

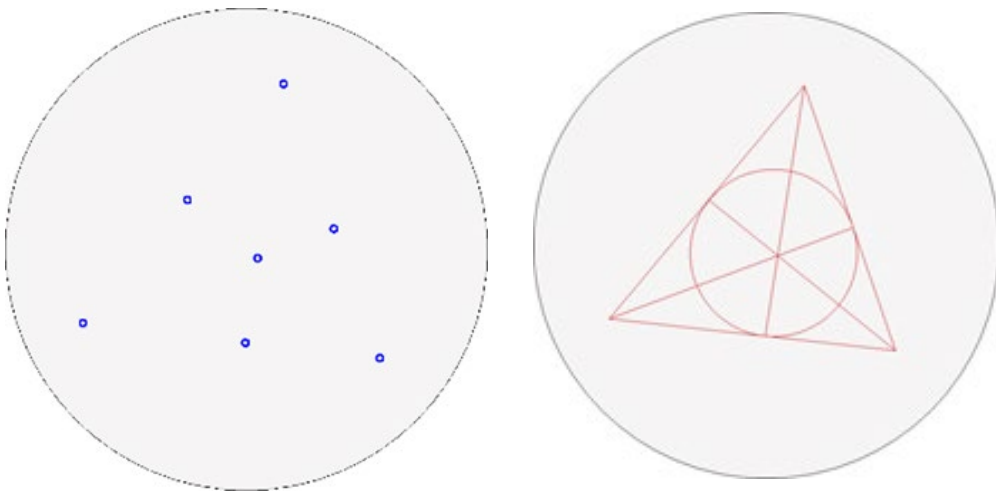
Bár talán meglepő, de ennek a projektív síknak csak *véges* sok eleme van. Csak hét pont és hét egyenes szerepel benne. A *Fano-sík* a projektív sík egyik legegyszerűbb modellje, melyet a következő rajzos és táblázatos bemutatása egyaránt reprezentál (képvisel). Kétféle módon is bemutatom a Fano-síkot, előbb rajzolva, majd táblázatba beírva. Mindkét esetben pirossal színezem ki az egyeneseket és kékkel a pontokat. Ez a későbbiek előkészítéseként hasznos lehet, amikor az egyik következő fejezetben már nem csak a véges geometriákról lesz szó, hanem az általában vett projektív térben a pont-tér, az egyenes-tér és a sík-tér szemléletének bevezetéséhez, illetve a végtelen fogalmához érünk. - Vigyázat! Az 1. ábrán körnek látszik ugyan a Fano-sík g egyenese, de nem kör. Gondoljunk bele, hogy eddig mit mondtak nekünk az egyenesről! A projektív geometriában jobb, ha minden előítéletünket eldobjuk-; szinte folyékonnyá kell tenni gondolkodásunkat ahhoz, hogy el tudjuk képzelni ezt a Fano-síkot, és - bár valóban szép-, ne csak tetszésnyilvánítással nézzünk rá, milyen szép! Mondhatnánk vonalakat is az egyenesek helyett. Tulajdonképpen pl. az f egyenest is körré tehetnénk, ha *folyékonyan* tudnánk lerajzolni az egyeneseket és a pontokat. Aki szeretné, próbálja átfolyatni az 1. ábrát úgy, hogy most a g tényleg „egyenesnek" látszódjék. Át lehet alakítani az 1. ábrát olyanra, hogy a g egyenesnek látszódjék, csak a hét egyenes 1. tábla bal alsó része szerinti és a hét pont jobb felső része illeszkedési struktúráját kell megőrizni. Mintha (az illeszkedési kapcsolatokat) gumiszálakra pántlikáznánk fel az A, B, C, s.í.t. pontokat. Az 1. tábla ezeket a pántlikázásokat tünteti fel). A pontokat nagybetűvel, az egyeneseket kisbetűvel írjuk.

	A	B	C	D	E	F	G	
		c	b	b	c	f	f	A
a			a	d	c	a	d	B
b	C			b	e	a	e	C
c	B	A			g	g	d	D
d	B	D	B			g	e	E
e	C	C	E	G			f	F
f	F	A	A	G	G			G
g	F	D	E	D	E	F		
	a	b	c	d	e	f	g	

1. tábla

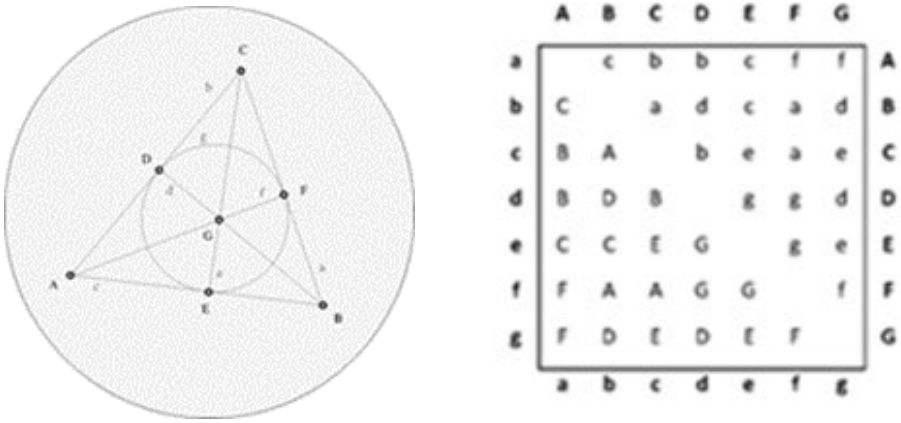
Tekintsük az 1. tábla bal alsó és a jobb felső részét, és ha jobban megnézzük, akkor látjuk, hogy a két rész a táblázat átlójára *szimmetrikus*, csak a kis és nagybetűktől kell eltekinteni. Jegyezzük meg jól, hogy ha eltekintünk a kis és nagybetűktől, akkor a tábla szimmetrikus. Még valahogy akkor is, ha a kis és nagybetűk maradnának - de akkor a szimmetria helyett valami mást kellene mondanunk. Mi az? Hogyan kell olvasni a két háromszög alakú táblázatot? A jobb felső háromszögben a pontpárokhoz tartozó egyeneseket látjuk, a bal alsó háromszögben az egyenesek metszéspontjait. Pontpárokra tekintve, ha a jobb felső vonal egyik pontjához, pl. az E ponthoz keressük ki a párjait, az A, B, C, D, F, G pontokat, akkor az EA, EB, EC, ED, EF, EG pontpárokhoz rendre a c, c, e, g, g, e egyenesek tartoznak. Csak ügyelni kell az olvasáskor, van benne egy kanyarulat, a fenti pontpárokra bejelöltem ezt a kanyart. Ennek megfelelően kell az 1. ábrát is olvasni.

Hasonlóan, az 1. ábrát is szét lehet szedni két részre, és így a $2^{+/-}$ ábrán a Fano-sík két részét kapjuk, a pontokból (2^{+} ábra) és az egyenesekből (2^{-} ábra) állót. Ez a szétválasztás a dualitás megértésénél kap majd szerepet.



$2^{+/-}$ ábra

Most próbáljuk meg összevetni az 1. ábrát és az 1. táblát, úgymond párhuzamosan végezzük el annak tételes ellenőrzését, hogy a modell két reprezentációja tényleg megfelel-e egymásnak? Ellenőrizzük le külön-külön mind a 7 pontra, hogy A-tól G-ig (bármely pontot is vegyük), 3 egyenes halad át rajta, és ellenőrizzük le külön-külön mind a 7 egyenesre, hogy a-tól g-ig (bármely egyenest is vegyük), 3 ponton halad át. Ha viszont eltekintünk a színezéstől, a Fano-sík alakjának szimmetriáját a $3^{a/b}$ ábrán bizonyára már nem látni azonnal.

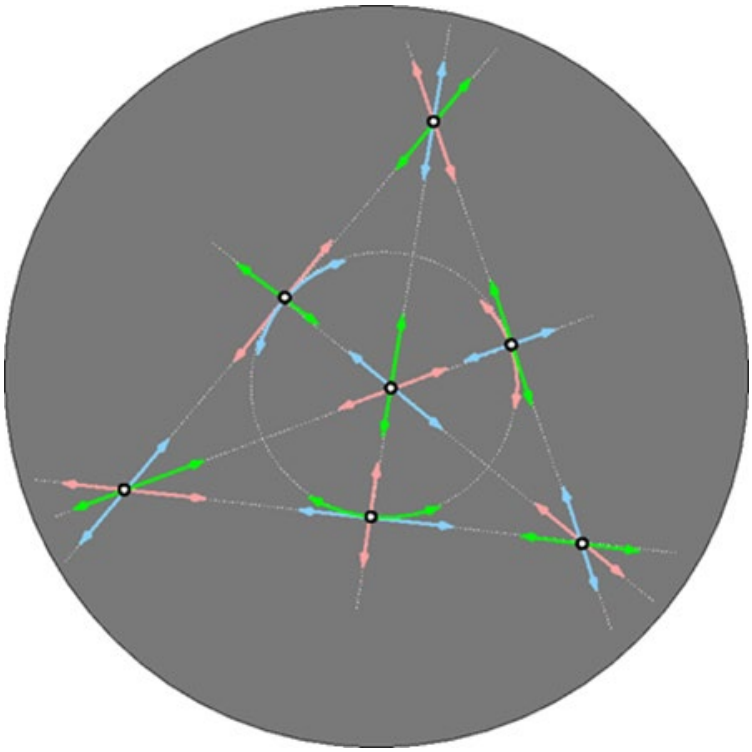


$3^{a/b}$ ábra

Mitől lesz projektív sík valamilyen elrendezés, ha nem attól, hogy érvényesül rajta a projektív sík összes axiómája, illetve, hogy mindent csak az alapfogalmak által meghatározott nyelven mondunk el! Ha begyakoroltuk magunkat ebbe a csodálatosan mozgékony szimmetria-rendszerbe, szinte megától adódik, hogy észrevesszük a fenti tétel *bizonyítását*. Egy matematikai elmélet kezdetén felállított axiómák, maga a nyelv, milyen alapfogalmakat használunk, a következtetési szabályok és így a tételek bebizonyítása: matematikai megismerési út. Milyen axiómákból indulunk ki, olyan betekintéseket szerezhetünk. Ennek végső finomítása lesz a matematikai szem, erre visszatérek.

Hármas tagozódás

Hogyan lehet *három színnel kiszínezni* egy ilyen Fano-síkot? Egy megoldást mutatok a 4. ábrán, aki máshogy szeretné kiszínezni, próbálja meg.



4. ábra

Képzeljük el, hogy az egyik társadalmi szervezet (szociális organizmus) irányító testületében heten tevékenykednek és a társadalmi szervezet hét életfunkcióval rendelkezik, amelyeket hét „reszort" mentén irányítanak a testületből. Tegyük még fel azt is, hogy a szervezet szociális formáit illetően - bizonyos módon, mivel egyenrangúak - nem lehet rangbeli különbséget tenni a testületben tevékenykedő személyek között és a reszortok között sem. Hogyan lehet megvalósítani a hármas tagozódást?

Megoldás: A 4. ábrán a pontok jelöljék az irányító testület tagjait, A-tól G-ig, a reszortokat pedig az egyenesek a-tól g-ig. Mint már láttuk, minden ponthoz 3 egyenes tartozik, és minden egyeneshez 3 pont tartozik. A társadalmi szervezet irányító testületének mindegyik tagjához 3 működési terület (reszort) tartozik és mindegyik reszortjában a testület 3 tagja tevékenykedik. Ezt eddig is tudtuk, de az újdonság most a 3^a ábrán látható Fano-forma kiszínezése 3 színnel, mégpedig úgy, hogy teljesülni fognak a következő feltételek:

Az egyéni lelki élet „szimmetrikusan" illeszkedik a társadalmi élethez. A mi példánkban minden reszorton (a 7 egyenes mindegyikén) megjelenik a társadalmi élet gazdasági, jogi-politikai és kulturális hármas tagozódása (minden egyenesre 3 szín fekszik fel), és a testület mindegyik tagja (a 7 pont mindegyikéből kiindulóan) saját gondolkodását, érzését és akaratát tudja működésbe lendíti az irányítási tevékenységben (minden ponton belül három szín lesz). Az irányító testület bármelyik tagja az általa vállalt 3 reszort mindegyikén másik két társával fog együtt tevékenykedni. Ha megpróbáljuk végiggondolni mindazt, amire ez a 4. színes ábra, mint szimbólum utal, beláthatjuk, hogy egy ilyen irányítású társadalmi szervezetnek nem lesz „fáraója", sem vezetője, de a szervezet egyetlen életterületén sem juthat senki sem túlhatalomhoz az irányító testületből, mert mindig másik két munkatárssal kell együttműködni.

Erre a fárao-mentességre a végén visszatérünk.

A *projektív geometria általánosítása*, ide vezet, ha a hármas tagozódást is hozzá akarjuk venni. Az *individuális emberi lény* és *a szociális lény* összekapcsolódnak. Az egyénit mondjuk jelölje a pont, a társadalmit pedig az egyenes, de az egyéni, s így a pont is három részes kell legyen, valamint a társadalmi, s úgy az egyenes is. Az ember kétféle képét kapcsoljuk össze most, az egyén képét és a társadalom képét. Az összekapcsolás háromféle lehet a hármas tagozódás szerint. A projektív sík axióma-rendszerében ez *az illeszkedés bővítése* lenne, és az ott mondott illeszkedés már nem csak egy pont és egy egyenes közti illeszkedés

maradna, hanem most már megmondanánk azt is, hogy *mi módon illeszkedik* egy pont és egy egyenes. A 2^+ és a 2^- ábrát most a színek mentén illesztjük össze. A 4. ábra tüzetes átvizsgálásával adódik annak az állításnak a bizonyítása, hogy a Fano-sík kiszínezhető 3 színnel, másképp mondva: kibővíthető egy három színű Fano-síkká.

Még tovább is mehetünk. A tér és duális tér elképzeléséhez is eljuthatunk. Úgy képzelnénk el, hogy az egyik tér egy külső (pozitív) tér lenne és a másik tér egy belső (negatív) tér lenne. Vagy fordítva, a belső tér duális tere külső lenne. Pl. az egyeneseken lévő színek a külső térben, a pontoknál lévő színek pedig egy belső térben lennének. Így a lélek hármas tagozódását egy belső térben képzelhetjük el, a szociális hármas tagozódást pedig a külső térben. Ekkor oda juthatunk, hogy a hármas tagozódás kapcsolja össze a lelki életet a társadalmi élettel, illetve felismerhetjük, hogy a pozitív és a negatív tér elképzelése pontosan olyan dualitást jelent, mint a lelki és a társas élet. A hármas tagozódást a tér és a duális tér szerint kell (pontosabban lehet) elképzelni.

Képviselők organikus választása

Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy a társadalmi irányítást végzők számára a megfelelő szociális formát úgy képzelhetjük el, amint ezt az előbbiekben a *kibővített Fano síkon* tanulmányoztuk. Így ha például hét életfolyamat határozza meg a szociális organizmust, azaz, ha hét funkciót lát el hét resszortban tevékeny ember, akkor hét fős lesz az irányító testület. Ebben az esetben végül akkor azt látjuk, hogy a szociális organizmusnak van egy *összerendező szerve*, egy szociális testülete, ki minek mondja, és ennek a szervnek vannak benne tevékeny tagjai. Már nem a vezetőknek mint ilyeneknek van egy társadalmuk, nem a földesuraknak van hűbér-rendszere, nem a funkcionáriusoknak van testületük, nem a kommunistáknak van egy bizottságuk, hanem fordítva, a szociális organizmus ezen szervében látnak el emberek bizonyos közfeladatokat. Ebben a szemléletben a képviselők megválasztásából nem következik

az, hogy a társadalmi szervezet képviselőinek megválasztása egyúttal az irányító testület egészének a választását is jelenti, vagyis, mondjuk, nem 4 vagy 5 évente tartanak *általános* választásokat, mert úgy képzeljük el, hogy van egy be- és van egy kiáramlás a hétfős testületből, hiszen a testület van, és létezik, mint a szociális organizmus egy szerve. Mint a szivacs felveszi a vizet, úgy veszi fel a testület a tagjait, de kiáramlás is van. Ha valaki kilép a testületből, oda új tagot választhatnak. Mindeközben a szerv továbbra is létezik, csak üresedés esetén egy választási eljárás keretében új testületi tagot juttat be a közösség. Már csak azt kell elképzelni, hogy a testület hét tagja közül mindenkinek egyéniesített a megbízatási ideje, és beláthatjuk, hogy ekkor el tudjuk kerülni azt, amikor rivall az óra, üt a mutatója, hatalmi taktikák és játszmák határozzák meg a testületi munkát, nem pedig az adott életfunkciók lelkiismeretes szolgálata. Nem szeretnék ezzel egy felforgató tevékenységet ideológiailag kidolgozni. Csupán azt mutatom be, hogyan látom én az emberiség előrehaladott hét mesterének szociális tevékenységét és azokban a társadalmi szervezetekben, amelyekben tisztelik az ilyen előrehaladottak munkáját és példát vesznek ezekből a dolgokból, azokban a társadalmi szervezetekben eltekinthetünk az általános választások hatalomtechnikáitól. Mert mindig *időközi* lesz a választás. Ez esetben nem csupán fáraótlan (oligarchamentes) lesz a társadalmi élet, hanem a hatalommal sem lesz lehetséges a visszaélés (világuralommentes).

A matematikai szem

A keresztény ezoterika hét vezető mesteréről az „Anthroposophia" c. lap 2020. karácsonyi számában a *Szeretet kérdéseivel* kapcsolatos cikkben adott képet átalakíthatjuk a 21. század társadalmi feladatait illetően.[vi] [vii] Az irányító testületben a hármas tagozódást úgy állnak készen a szociális organizmusba árasztani, hogy nem lehet egyiküket sem a másik fölé emelni ezen a téren, és mindig hárman dolgoznak egy életfunkció fejlesztésén, egy adott reszorton egyikük mindig akarati, másikuk érzés,

harmadikuk gondolati erővel, ill. bármely társadalmi életállapotot vegyük is, azt a gazdasági, jogi és kulturális szempontok szerint fejlesztik. A szociális hármas tagozódási mozgalomban általános a tapasztalat, hogy jellemzően sok dolog közti bonyolult összefüggéseket kell több síkon, néha egyszerre is áttekinteni. Kétségtelen, ehhez világos gondolat kell. Az antropozófiában adott gondolati tartalom lehetővé teszi a szellemi világot világos gondolattal látni, olyan világossággal áthatottan, mint ahogy pl. a geometriában lehetséges, úgy, hogy a szellemi látószerv mint egy világos szem, matematikai precizitással épül fel:

„…ahogyan a matematikus előtt a problémája, a szellemi kutató előtt ott van a saját „szellemi szeme"… A szellemi kutató a tudományt a látás előkészületeként alkalmazza. Elkezdődik a látás, a tudománynak akkorra már a teljes hivatását be kellett töltenie. Ha a látását „tisztánlátásnak" akarjuk nevezni, úgy ez „egzakt tisztánlátás". Ahol az érzéki tudomány végződik, ott kezdődik a szellemtudomány." [viii]

Rudolf Steiner, mint „Életutam" c. művében leírja, magyar területen élt, Újfaluban élte át először *a szellemi látásban* és a *geometriában* ugyanazt a világosságot – akkor 8-9-10 éves volt. Képzeljük el, ezen az alapon nekünk is szabad gyermeknek lenni, és úgy rácsodálkozni a geometriára.

„A geometriában - mondtam magamnak - szabad valamit tudnunk, amit csak a lélek maga, saját ereje által él át. Ebben az érzésben találtam meg annak az igazolását, hogy a szellemi világról, amelyet átéltem, éppen úgy beszéljek, mint a fizikairól. És így is beszéltem róla. Két olyan fogalmam volt, amelyek határozatlanok voltak ugyan, de már nyolcadik évem előtt is nagy szerepet játszottak lelki életemben. Megkülönböztettem azokat a dolgokat és lényeket, amelyeket „látunk" azoktól, amelyeket „nem látunk". Ezeket a dolgokat az igazságnak megfelelően mondom el, annak ellenére, hogy azok, akik okokat keresnek arra, hogy az antropozófiában valami fantasztikumot lássanak, ebből talán azt a következtetést vonják le, hogy már mint gyermek is hajlottam a fantasztikum felé, nem csoda tehát, hogy azután egy fantasztikus világnézetet alakítottam ki. De éppen mert tudom, hogy később a szellemi világ leírásában milyen kevéssé vezettek személyes hajlamaim, hanem csakis a dolog belső szükségszerűsége, éppen ezért egészen objektíven tudok arra a gyermekien gyámoltalan módra visszatekinteni,

ahogy a geometriával igazoltam magam előtt, hogy beszélnem kell egy olyan világról, amelyet „nem látunk". De azt is meg kell mondanom, hogy szívesen éltem ebben a világban. Mert a fizikai világot szellemi sötétségnek éreztem volna magam körül, ha nem kapott volna világosságot erről az oldalról. Az újfalusi segédtanító adta meg geometria könyvével azt az igazolást a szellemi világról, amelyre akkor szükségem volt."[ix]

A szellemi látás egészen precíz, matematikailag precíz felépítése nem mellőzhető, ha a jelen és a jövő életének szükségleteihez olyan gondolkodást szeretnénk kifejleszteni, amelyik a szociális konfigurációk magvát képes megragadni. Egy későbbi munka lehet csak az, amelyikben kimutatom Hegel tézis, antitézis és szintézis szemléletét a térgeometriára alkalmazva, hogy Hegel logikája és Goethe metamorfózis-elmélete igencsak közel állnak egymáshoz. Ezért titkolják Hegel logikáját a világkormány létrehozását illetően.

Az éteri tér matematikai alkatának kutatása

„… azzal, hogy a csillagok közti kapcsolatokra kizárólag csak a matematikai egyenes vonalak szerint tekintünk, sírba helyezzük a minket mindenhol körbevevő szellemi erőket: ez ölte meg az isteni Sophia-t, a második Isis-t …" [x]

Rudolf Steinernek ez a gondolata némi egyszerűsítéssel arra utal, hogy az élő, eleven formákat mintegy megöli a geometria x-y koordinátarendszerre rögzítése (vagyis az analitikus geometria). Újra elevenné kell tenni a geometriát, vagyis át kell hatni imaginációkkal (ebben az imaginatív irányban kell elképzelni az antropozófusok projektív geometriával kapcsolatos tevékenységeinek belső értelmét)[xi]. Lucifer az analitikus geometria origóban kereszteződő derékszögű koordináta rendszerével ölte meg századokkal ezelőtt a formavilág elevenségét (végül Sophiát). Az analitikus geometriában a geometriai alakzatokat, így a kört, az ellipszist, stb. a koordinátarendszerre (a centrális pontban kereszteződő tengelyekre) felvett függvény formulája

hozza létre. A szintetikus geometriában elsősorban csak illeszkedés van a pontok és egyenesek között. Miben tér el a szintetikus geometria az analitikus geometriától?

Ezzel foglalkozik Elisabeth Vreede is a „Néhány megfigyelés a szintetikus geometriáról George Kaufmann Strahlende Weltgestaltung c. munkájának megjelenését illetően. 1934. szeptember''[xii] címmel közölt szemlélődésében E cikk főbb megállapításait mutatom be. George Kaufmann „Strahlende Weltgestaltung" c. munkája elején felidézi, hogyan írja le Rudolf Steiner a két geometria közötti különbséget.

„Amikor koordinátákat építünk a térben, valójában a formát ezzel nem tudjuk felfogni, csak a forma pontjainak koordinátáit, pl. amikor ezeket összekapcsolva kapjuk meg az egyenest. Az ilyen analitikus geometriában valójában nem lépünk be a formába. A szintetikus geometriában viszont magukban a formákban élünk. Rudolf Steiner gyakran hívta fel a figyelmet a szintetikus geometria antropozófiai jelentőségére, mert ez a tudományos irány hasonlít leginkább az érzékfeletti megismeréshez, és különösen a szellemi világokban való tudatos tapasztalatnak ahhoz a formájához, amelyet imaginációnak nevezünk. Rudolf Steiner felismerte a szintetikus geometria óriási jelentőségét a természettudomány jövője szempontjából."

Az emberi evolúcióban egészen újként megjelenő természettudomány a modern tudat, a tudati lélek korának elérését jelzi. A természettudomány volt a tudati lélek egyik nevelője a tizenötödik és tizenhatodik századtól kezdve. A matematika fejlődésében ehhez képest a tudati lélek kora elején kezdetben nem lehet olyan döntő bemetszést találni, mint a külső természet megismerésében, mert a matematika nagy fejlődése bizonyos szempontból csak a tizenhetedik századtól tételezhető. A francia René Descartes (1596-1650) az analitikus geometriával és a szintén francia Girard Desargues (1593–1662), a szintetikus geometriával hozható kapcsolatba. A tizenhetedik században ismerték is egymást. A fizikába az analitikus geometria ment át. Ezen kell változtatni a projektív geometriával, a goethei természettudományban.

A természettudomány és a matematika fejlődési íve, pályája a tizenhetedik században keresztezte egymást. A természet közvetlen

megfigyelésétől már eltekintő, s így a szellemtől egyre inkább mentesülő „atomizmus" valamint a „differenciál- és integrálszámítás" egyesüléséből a tizennyolcadik és tizenkilencedik század kemény materializmusa lett. Mindeközben, és mindettől függetlenül a tizenkilencedik század folyamán (újra) felmerült a szintetikus geometria.

Rudolf Steiner azt mondta, hogy a (szintetikus) geometria tette először lehetővé számára, hogy teljesen tudatosítsa az érzéki világ és az érzékfeletti világ közötti valódi különbséget, amelyet leginkább az analitikus geometriából a szintetikusba való átmenet során lehetett a legélénkebben érezni, mint mondta.

A matematika és a természettudomány egymáson történt áthaladása előtt azonban művészi érdeklődés keletkezett a térbeli perspektívák és vetítések (általában a projekciók) iránt. Amikor a tizenhetedik század előtti a még jobbára inkább csak ébredező tudati lélekben megérezték a vágyat a tárgyak térbeli ábrázolására, ahogyan azok az egyes megfigyelők szemszögéből, azaz a perspektíva szerint megjelennek, akkor először a nagy művészek (Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer) vizsgálták a témát. Ezt vitte tovább matematikailag Girard Desargues, aki azt a zseniális elképzelést alkotta meg, hogy az egyenes alkatára úgy is lehet tekinteni, hogy az két irányban fut ki a végtelen felé, de ismét visszatér önmagába. Akkoriban még nem vették át a matematikusok Desargues ragyogó megérzését, amelyre az egyenes egyre távolabbi pontjának perspektivikus vizsgálata vezetett, különösen a kúppal kapcsolatban. Ehhez jött hozzá [már jóval később Desargues után], hogy az egyik irányban a végtelenben lévő pont megegyezik a másik irányú végtelen ponttal. E szemlélet szerint a párhuzamos egyenesek ugyanabba a pontba érkeznek el a végtelenben, mint a vasútvonalak, amelyek a látóhatár egy pontja felé mutatnak. Desargues geometriai felismerései túl korán érkeztek. Csak a tizenkilencedik században tapasztalták meg a matematikusok Desargues új képzeletének teljes termékenységét, ez azonban tisztán a matematikán belül maradt mert akkor még nem tudták Desargues szemléletét és eredményeit a természettudományok számára hasznosítani.

Az a gondolat, hogy a párhuzamos sugarak a végtelenben épp úgy találkoznak, ahogy a nem párhuzamos sugarak metszete a véges tér egy meghatározott pontját képezi, az előbbiekben bemutatott első axiómában került megfogalmazásra a projektív síkot illetően. A projektív síkon meg se különböztetjük egymástól a végesben és végtelenben lévő pontokat. A szokásos euklideszi tér-geometria pontjaihoz ha hozzáadjuk a végtelen távoli pontokat, és egyeneseihez a végetlen távoli egyenest, valamint egy végtelen távoli síkot is, akkor ezek még meg vannak különböztetve, de mihelyst a véges és a végtelen közti megkülönböztetést megszüntetjük, a projektív teret kapjuk. A véges és a végtelen tér problémája egészen másként kezelendő, és ezért is szerettem volna a projektív geometria iránti motivációk felkeltésére az előbbiekben egy ún. véges geometriai példát adni a Fano-síkkal (amely csak azért véges sík, mert véges sok pontja és egyenese van csak), mert így viszonylag a leggyorsabban válik ez világossá. A Fano-síkot azonban nem lehet beilleszteni (megépíteni) semmilyen, akár magasabb dimenziós euklideszi térbe se. A Fano-síkot bemutató rajz csak illusztráció, nem ábrázoló geometria.

Azzal, hogy a végtelen felé egyik irányban kifutó egyenes a vele ellentétes másik irányból visszatér, akár mint egy végtelen sugarú kör, olyan megoldást találtak, amely a közel kétezer éves múltra visszatekintő párhuzamosok problémájára ad egy választ. Válasz volt arra a kérdésre, amellyel Rudolf Steiner is birkózott 9 éves korában, amikor egy geometria tankönyv került a kezébe: hol találkoznak valójában a párhuzamos vonalak?

„Kötelező tanulmányaim szempontjából, amelyeket filozófiai érdeklődésem miatt kissé elhanyagoltam, igen jól jött, hogy már korábban sokat foglalkoztam differenciál- és integrálszámítással, valamint analitikus geometriával. Így egyes matematikai előadásokról elmaradhattam anélkül, hogy az összefüggést elvesztettem volna. A matematikának egész megismerési törekvésemben alapvető jelentősége volt, hiszen azoknak a nézeteknek és fogalmaknak a rendszere, amelyeket a külső fizikai tapasztalástól függetlenül szerzünk. És mégis - mondtam magamnak - ezekkel a nézetekkel és fogalmakkal közelítjük meg a fizikai valóságot és ismerjük meg törvényszerűségeit. A matematika révén ismerjük meg a világot, de hogy ezt

elérjük, előbb felszínre kell hoznunk az emberi lélekből a matematikát. Abban az időben éppen a matematika révén döntő élményhez jutottam. A tér elképzelése a legnagyobb nehézséget jelentette számomra. Mint a minden irányban a végtelenbe kiterjedő ürességet - aminek az akkor uralkodó természettudományos elméletek tanították - nem lehetett áttekinthető módon elképzelni. Az újabb (szintetikus) geometria, amelyet az előadásokból és egyéni tanulmányaimból ismertem meg, szemléletessé tette számomra, hogy a vonal, amelyet jobb felé a végtelenbe hosszabbítunk meg, balról visszatér kiindulópontjához. A jobboldali, végtelen távolságban levő pont azonos a baloldali végtelen távolságban levő ponttal. Úgy láttam, hogy az újabb geometria ilyen elképzelésével az űrben egyébként elvesző teret fogalmilag meg lehet érteni. A körben futó, önmagába visszatérő egyenes kinyilatkoztatásként hatott. Úgy mentem el arról az előadásról, amelyen ez először világlott fel bennem, mintha valami mázsás súly hullott volna le rólam. Felszabadultnak éreztem magam. Mint egész kisfiú koromban, most is olyasvalamit kaptam a geometriától, ami boldoggá tett."[xiii]

Említett cikkében Elisabeth Vreede rámutat arra, hogy Rudolf Steiner tanításaiból a fizikai és az éteri tér tudományos vizsgálatának zseniális ötlete vezethető le. Teljesen helytelen lenne ugyanis feltételezni, hogy a régi geometriához hozzáadott „végtelen" vagy „végtelenül távoli" fogalmak csak egy homályban maradó üres űrbe vezetnének. Kiderül, hogy a végtelen távoli pont, végtelen távoli egyenes, végtelen távoli sík, [és az n-dimenziós projektív tér duális tere[xiv]] azok a matematikai kifejezések, amelyek *összekötik* az éteri világot a fizikai világgal. A *tér és ellentér* csodálatos ötlete tehát Rudolf Steiner tanításaiból vezethető le. Így például a Hágában 1922. április 12-én a főiskolai kurzuson (GA 82) tartott előadásában a növény vonatkozásában egy centrális tér-rendszerről és egy vele poláris térbeli rendszerről van szó – a jobb érthetőség kedvéért néhány szóval bővített fordításban:

„Amikor itt a Földön mondjuk egy növény gyökerét tekintjük, a gravitációban történő sajátos fejlődésével van dolgunk, még mindig a hétköznapi tér dimenzióin belül maradva. Azonban ez nem megy, ha a virág formáját akarjuk megmagyarázni. Ahelyett, hogy [a centrális erőtérben] az origóból kiinduló [tér-] koordinátákat vennénk, [a perifférikus erőtérben] a pont felé a végtelen gömb felszínének belső oldalából – ami csak a pont másik [polárisan ellentétes] formája – befelé jövő [duális polártér-] koordinátákat kell képezni. Ahelyett, hogy centrifugálisan kifelé

mennénk, befelé kell mennünk, centripetálisan .... és … rosszul járnánk el, ha egy centrális ponttól kifelé építenénk a koordinátatengelyeket. A végtelen gömböt kell ekkor a koordináták kezdőfelületének venni, ahonnan befelé kell rajzolni a koordinátákat. Amint beléptünk az éteribe, egy minőségileg ellentétes koordinátarendszert nyerünk ... Az éteribe jutva, a pont helyébe a gömböt kell venni, és ahelyett, hogy belülről építenénk ki az egész rendszert, ezt a másikat kell venni."[xv]

A fizikai tér centrális tér, az éteri tér periférikus tér. Ennek a tudását *Valaki* hozza felénk. A végtelen felhőkből hirtelen felénk lépő síkseregen át jön közel hozzánk *Valaki*, ahogy George Kauffmann számára (másik nevén George Adams) 1933-ban megjelent az éteri térről szóló matematikai kutatás eredménye (George Adams: Die Aetherische Raum) - Az előbbiekben említett fennsík, és a Fano-sík valójában az étericség egy imaginációja.

Biográfiai szempontok - Schmitt Jenő Henrik

Coxeter szerint nem Desargues volt az első, akiben megjelent a végtelen távoli pont képe[xvi], hanem Kepler. Ehhez Tycho de Brahe csillagászati megfigyelései vezették Keplert 1604-ben publikált művében[xvii], mert a Mars pályájának értékei eltértek az elvárttól. Tycho de Brahe 1601-ben halt meg. Rudolf Steiner leírja, hogy a Marson 1604-ben a Buddha egy tettet hajt végre .

Majd megtudjuk Rudolf Steiner egyik karma-előadásából, hogy Tycho de Brahe inspirálóan hat az antropozófia előkészületeire.[xix] Felvethető ezért, hogy a projektív geometria Elisabeth Vreede által leírt 17. századi előzménye Desargues-nál a szellemi világból érkező speciális inspirációból ered, nevezetesen Tycho de Brahe így készítette elő Michael korszakának geometriai útját.

A tudati lélek biográfiájának a vészesen drámai, matériába vesző mozzanata, *Sophia megölése a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerrel*, illetve az ebből történő tudati feltámadás az élő formavilágba, mint

láttuk Rudolf Steiner életútjának egy geometriai mozzanata is egyben. Aki szereti az antropozófiai biográfia és karma-kutatások kapcsolatát a csillagászattal, biztos jelentőségtelinek találja, hogy az új misztérium Rudolf Steiner életútjában a fél holdcsomó idején (mintegy 9 éves korában) Magyarországon jelenik meg először, ahogyan Rudolf Steiner „Életutam" c. művének fent idézett részlete rávilágít a szellemi látás és a gondolkodás összekapcsolásának geometriai körülményeire. Ezt követően egy holdcsomóval később találkozott Rudolf Steiner /az akkori Magyar Királyság területén?/ a keresztény ezoterika egyik mesterével, amikor 1889-ben nyáron és télen is Magyarországra utazott ment?[xx]

„Mi is az a holdcsomópont? Ez a pont a Hold és a Nap pályájának metszőpontja, mely az egész állatövön körbe vándorolva 18 év és 7 hónap után tér vissza arra a helyre, ahol a születéskor volt. Hogy ez a tény döntő befolyással lehet az ember életére, mutatja, mennyire bele van ágyazva az ember egyedi fejlődése is a kozmikus folyamatokba. … Sokszor egy találkozás sorsdöntővé válik."[xxi]

Rudolf Steiner mesterével történt sorsdöntő találkozása előtt egy holdcsomóval, 9 éves kora körül élte át először a geometriával kapcsolatosan a boldogságot. Főiskolás korában ismét boldog volt, amikor megértette a gondolatot, hogy az egyenes egy végtelen távoli ponton át visszatér önmagába. Dongalábú középiskolai geometria tanárával kapcsolatos még egy magyar vonatkozású karmikus esemény.[xxii]

Rudolf Steiner azt követően talált rá donga lábú geometria-tanárának előző életére, amikor egy vidám társasági összejövetelen sudár és élénken gesztikuláló barátja, Schmitt Jenő Henrik élénk magyarázatai közben az asztal alá esve véletlenül megrúgta a házigazda költőnőt.[xxiii] Három rövid idézettel szeretném felidézni Rudolf Steiner magyar-német barátja, Schmitt Jenő Henrik alakját, mert belsőleg matematikai alkatú volt, de különös módon volt az. Sajnos nem jutott el a szellemi látás precíz minőségéhez, mégis jelentős írásai voltak a manicheizmusról a *Die Gnosis* c. műve első kötetében, melyből Rudolf Steiner is idézett a

manicheizmusról tartott a jelentős, korai előadásában.[xxiv] A második kötetben név szerinti is említi Rudolf Steinert.[xxv] Különösen ismert az anarchizmus történetében, Tolsztoj barátja volt. A Gödöllői Művésztelep egyik szellemi inspirálója, szellemi tanítója volt. Az 1909-es Budapesti Kongresszuson Migray József, Schmitt Jenő Henrik teozófus tanítványa is tartott előadást – ekkortájt az Akadémia Kávéházban tartotta előadásait Schmitt Jenő Henrik.

„Kilenc évvel ezelőtti bécsi találkozásom egy férfiúval szép szellemi gyümölcsöt ígér a jövőben is. Nevét sokat emlegették a magazinok és újságok. Nemrégiben díjat kapott a Berlini Filozófiai Társaságtól Hegel világnézetének legjobb ábrázolásáért. Más körök is érdeklődtek iránta, beleértve azokat is, akik különben rendkívül közömbösek lettek volna egy hegeli filozófiával foglalkozó könyv iránt, ha a szerző életkörülményei nem tették volna szenzációs eseménnyé. Mert ez a szerző egy kulturálisan távol eső magyar fészekben, Zomborban dolgozta ki művét, ahol bírósági jegyzőként dolgozott. Sokak szemében pikáns személyiséggé tette őt az, hogy egy elismert német tudós társaság annak az embernek a gondolatait minősítette a legkomolyabbnak, aki kora reggeltől késő estig a magyar régió egyik sarkában éppen a legmélyebbre ható gondolatait fogalmazta meg a század leghatékonyabb filozófiájáról. Örömmel töltenek el ama világkép magvai, amelyeket ez az ember hordozott magában, és amelyeket akkori bécsi látogatása során ritka ékesszólással tárt elém. Ígéretes ötletek gazdagsága élt benne, a filozófiai lelkesedés hordozta élénk nyelven ismertette nézeteit. Még mindig látom, ahogy ott ült velünk: a nagy osztrák költőnővel, Marie Eugenie delle Grazie-vel, a bécsi egyetemi tanárral, Laurenz Müllnerrel és velem. Belső öröm villant át rajtam, amikor azt éreztük, hogy vannak ilyen emberek a jelenben. Schmitt Jenő Henrikről beszélek, aki azóta is, nagy elismerést szerzett bizonyos körökben az individualista-anarchista irányba tartozó írásai miatt…..” [xxvi]

„Még a kortárs szellemi élet azon területein is, amelyeken nem keresik közvetlenül a misztikus és teozófiai ismereteket, vannak olyan áramlatok, amelyek prófétai nyelvükkel élen járnak a misztikus és az igazi teozófus számára is. Sokan állnak közel a misztika bejáratához, de az utolsó lépéseket nem tudják megtenni. Szívük késztetése, idealizált gondolataik a lélek és a szellem magasb szemléletére mutatnak,

de megállnak az előszobában, mert az elmúlt évszázadok értelmi kultúrája túlságosan elnyomja szellemi erőiket. Ekkor a misztikus ott áll, és csodálja az erőt, amellyel az igazságért küzdenek, gyakran csodálja azt a gátlástalan merészséget, amellyel a körülöttük élők előítéletei ellen küzdenek-; be kell ismernie magában, hogy félúton megállnak. Ám ha jobban megnézi, vigaszt nyer belőle, hogy némelyek az ő irányába mutató jövő felé törekednek, hogy olyan képzeteket és szemléleteket készítenek elő, amelyek ha nem is a maga számára, de legalább másoknak valódi szellemi tudást jelentenek. Valóban nem hiába teszi ezt, mert először is meg kell említeni ezen kiválóságok egyik legjobbját. Schmitt Jenő Henriket, a magányos budapesti gondolkodó, nemrég jelentette meg a gnosztikusokról szóló fontos munkájának első kötetét…." …[xxvii]

„A kérdésre: „Mit gondol Dr. Schmitt Jenő Henrikről?" ezt mondta Rudolf Steiner: „Miután közzétette a hegeli dialektika titkáról szóló művét, sokat írt a teozófiáról, és szimpatikussá tette magát, ahogyan a teozófiához viszonyul. Gondolkodásmódja azonban túlságosan matematikai, túlzottan konstruktív-matematikai és túl kevés intuíción alapul. Gondolkodásmódja továbbá nem toleráns más nézetekkel szemben."[xxviii]

Tényleg, a pont mozgatása azért lehetséges csak, mondja egyik művében Schmitt Jenő Henrik, mert már van egyenes, amin a pont mozoghat. Mi azt mondtuk, hogy a pontot mozgatva kapjuk az egyenest, de ezt Schmitt Jenő Henrik nem fogadná el.

Ami a projektív geometria mögött van…

A Fano sík *szociális imaginációjával* semmiképp sem szerettem volna Schmitt Jenő Henrik anarchizmusát folytatni, csak rá akartam mutatni arra, hogy a jelenkor hatalomtechnikája helyett a hét mester képét tanulmányozhatjuk, amint ők mind átvették a szociális hármas tagozódást, és eszerint vezetik tovább az emberiséget.

Lars Grünewald a Hegel logikájáról írt tanulmányában[xxix] mutatja ki Rudolf Steiner kutatásai alapján, hogy az anglo-amerikai titkos társaságok ismerik Hegel-logikáját, ami hatalmuk fokozásának legbelső gondolati technikája. Minél inkább el tudják titkolni Hegel logikáját, annál jobban fel tudják erősíteni hatalomtechnikájukat. Mint láttuk, a projektív geometriához Hegel gondolatépítményével is el lehet jutni, bizonyára nem véletlen tehát, hogy a projektív geometriát sajnos általában nem tanítják a középiskolákban, nem része az általános repertoárnak. Fordítva, minél inkább elterjed a projektív geometria, annál kevésbé sikerül egy világdiktatúrát építeni. Mi se bizonyítja jobban a fentieket, mint az, hogy a piramis belsejében a mindent látó szem, mint szimbólum, a Fano-sík egy rafinált átalakítása. Azért olyan a projektív geometria, mint egy fennsík, mert ez ad magyarázatot a mesterek síkján feltett kérdésére, miért van itt az ideje a szociális hármas tagozódásnak.

Budapest, 2021. szeptember 29 – 2022. február 25.

---

[i] Alfred North Whitehead: A Treatise on Universal Algebra: With Applications, Cambridge, 1898. 239.§. p. 414.
[ii] Kepler: Paralipomena in Vitellionem, 1604.
[iii] Oliver Conradt: Mathematical Physics in Space and Counterspace, Verlag am Goetheanum, 2008.
[iv] Klug Lipót: A projektív geometria elemei synthetikai-geometriai módszerrel, a Magyar Tud. Akadémia segélyezésével Franklin Társulat, Budapest, 1892. és Klug Lipót: Projektív geometria, Magyar Tudományos Akadémia támogatásával Lampel Robert Budapest 1903.
[v] A Fano sík a legegyszerűbb, nem degenerált projektív tér, mint ilyen a legkisebb, és véges algebrai test feletti geometria, de ez nem keverendő össze a metrikus tér fogalmával. Több mai könyvben is a tanulmányok elején megadják a Fano síkot, bizonyára azért, mert könnyű áttekinteni, pl. Csikós Balázs – Kiss György: Projektív geometria, lásd xiv jegyzetet, pl. Pintér Gergő: Új világok teremtése, Typotex, 2020.
[vi] Seress Attila A szeretet nyolc kérdése, in: Anthroposophia, 2020. karácsony.
[vii] Szergej Prokofjev a keresztény ezoterika hét mestere által alkotott „testület" képét nem a Fano-sík szerint, hanem egy Michael-hétszög szerint adja meg, hozzáteszi azonban, hogy a téma bonyolultsága miatt nem ez az egyetlen struktúra, még más megtoldások is lehetségesek. Ilyen „más" megoldási kísérlet lehetséges a Fano-sík szerint, ami speciálisan a szociális hármas tagozódására vonatkozik, míg Szergej Prokofjev struktúrája egy általános vett kép. Sergei O. Prokofieff: Rudolf Steiner and the Masters of Esoteric Christianity.
[viii] in Rudolf Steiner: Kozmológia, vallás, filozófia
[ix] Rudolf Steiner: Életutam
[x] GA 202, 1920. dec. 24.

[xi] GA, 202, 1920. dec. 26.
[xii] Elisabeth Vreede: Some Observations on Synthetic Geometry With regard to the publication of George Kaufmann's work Strahlende Weltgestaltung September 1934, in Elisabeth Vreede: Esoteric studies.

[xiii] Rudolf Steiner: Életutam, GA 28
[xiv] A duális tér és a dualitás elve, in: Csikós Balázs – Kiss György: Projektív geometria, a Magyar Tudományos Akadémia Könyv és Folyóiratkiadó Bizottsága támogatásával, Polygon, Budapest, 2011
[xv] Rudolf Steiner előadása, Hága, 1922. április 12. GA 82
[xvi] *„Kepler bevezette a végtelen távoli pontokat…"* H. S. M. Coxeter: A geometriák alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973. 235. old.
[xvii] Lásd a ii. jegyzetet. Továbbá H. S. M. Coxeter: Projektív geometria c. könyvének Történeti megjegyzések c. fejezetében írja: *„… Johannes Kepler (1571-1630) német csillagásznál és Girard Desargues (1591-1661) francia építésznél megjelent egy fontos fogalom: a végtelen távoli pont fogalma (egymástól függetlenül jutottak hozzá)."* Időben azonban Kepler 1604-ben, Desargues 1639-ben publikált a végtelen távoli pont fogalmáról..
[xviii] Rudolf Steiner: Ezoterikus kereszténység és az emberiség szellemi vezetése, GA 130
[xix] GA 238, 1924. szept. 16.
[xx] Rudolf Steiner találkozásairól a mesterrel több szerző is írt, döntően közelebbi tanítványai által írt feljegyzések és közlések leiratai alapján.
[xxi] Az életút és törvényei, Jan Pohl: 12 hang a 21. századból, 38. old.
[xxii] GA 235, 1924. márc. 22., márc. 23.
[xxiii] GA 235, 1924. márc. 22.
[xxiv] Rudolf Steiner Berlinben, 1904. november 11-én tartott előadásában idéz Schmitt Jenő Henriktől (GA 93), v.ö. Eugen Heinrich Schmitt: Die Gnosis Band I, Verlegt Bei Eugen Diederichs, Leipzig 1903, 548-627. old.
[xxv] Eugen Heinrich Schmitt: Die Gnosis Band II, Verlegt Bei Eugen Diederichs, Jena 1907, 409., 412. old.
[xxvi] Rudolf Steiner: „Zarathustra egy igazi tanítványa" c. cikkének elejéről, GA 31
[xxvii] Rudolf Steiner: „Schmitt Jenő Henrik „A gnózis" c. könyvéről" írt cikke elejéről, GA 34, GA 38, Lucifer-Gnózis, 1903. július
[xxviii] Az emberiség jövője c. előadás utáni kérdésre adott válasz, GA 53. 1905. március 30.
[xxix] Kézirat.